UNIDAD II: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN E INTEGRAL INDEFINIDA

2.1 Definición de integral indefinida

La integral indefinida es la operación matemática que dada una función f(x) tiene el propósito de obtener una función F(x) de modo tal que A F(x) se le conoce como función primitiva o anti derivada.

Es típico agregar una "c" que se conoce como constante de integración, esto es debido a que la derivada de una constante es cero, lo que no afecta a la derivada de f(x).

2.2 Propiedades de la integral indefinida

Básicamente son dos:

2.3 Cálculo de integrales indefinidas

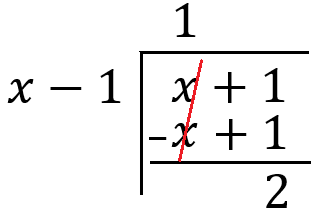
a) Directas

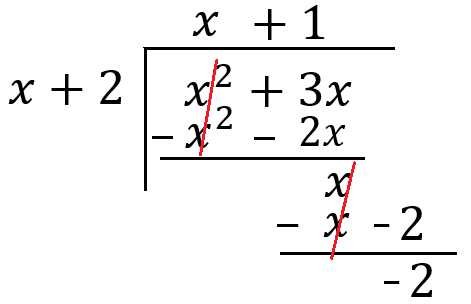
Por definición:

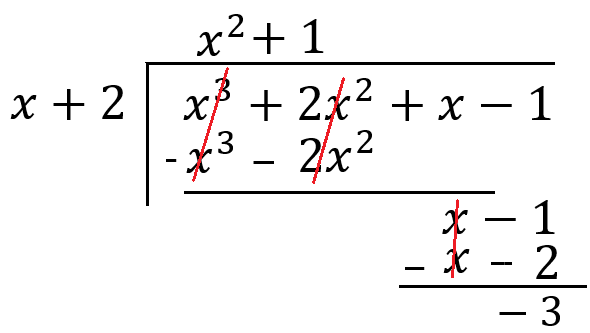
\* Integraciones trigonométricas por fórmula directa

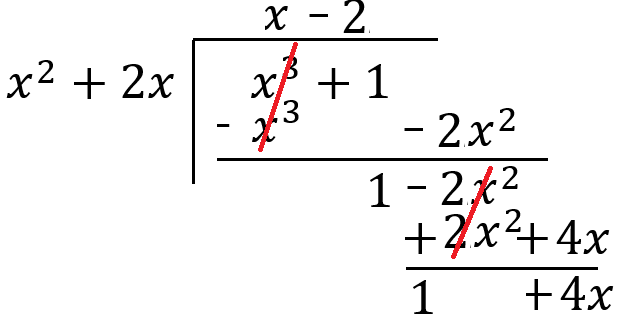
\* Integraciones pitagóricas

\* Problemas misceláneos









b) Cambio de variable

1.- Por lo regular se sustituye el elemento que tiene la raíz por la variable artificial

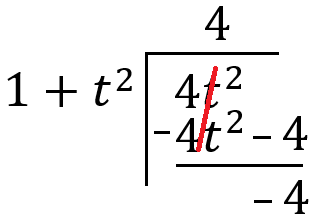
2- Se despeja la variable original

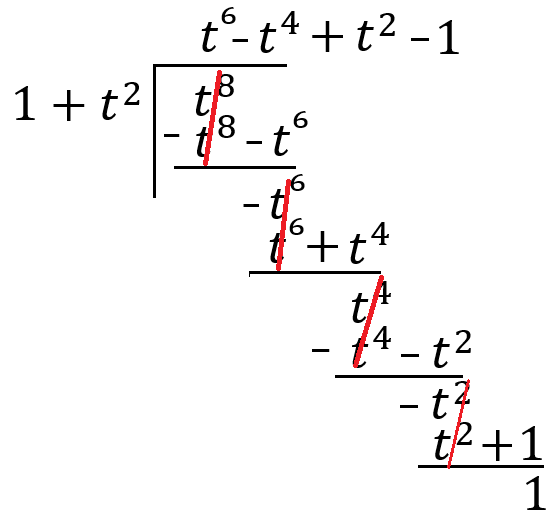
3.- Se calcula el diferencial de la variable original

4.- Se sustituye la variable original por la artificial

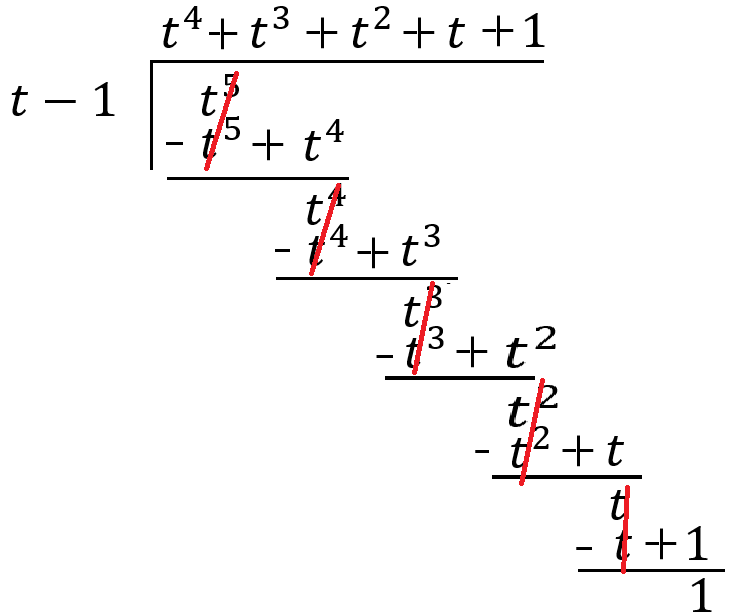
5.- Se resuelve la integral

6.- Retornamos a la variable original con la sustitución correspondiente

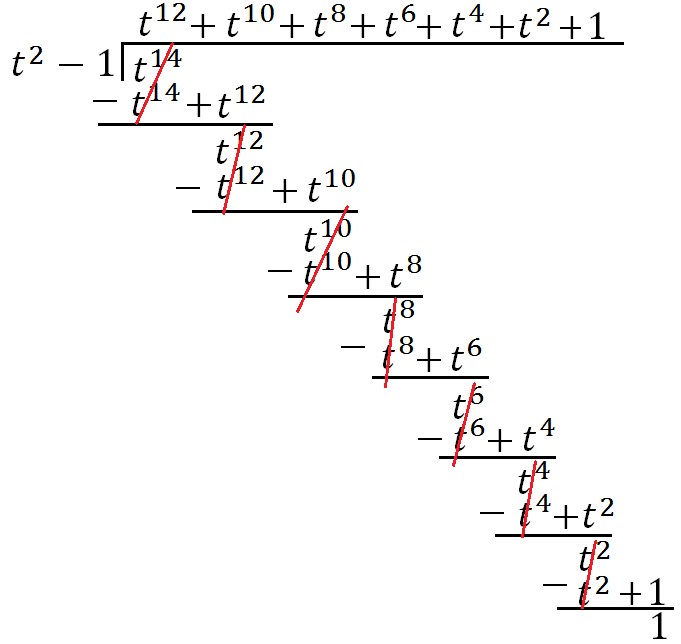




* Nota: al tener raíz cuadrada (2) y raíz cúbica (3), el mínimo común múltiplo es 6, por lo cual habrá que igualar la variable artificial a la raíz sexta



* Nota: al tener raíz cuadrada (2) y raíz cuarta (4), el mínimo común múltiplo es 4, por lo cual habrá que igualar la variable artificial a la raíz cuarta



* Nota: al tener raíz cuadrada (2) y raíz cuarta (5), el mínimo común múltiplo es 10, por lo cual habrá que igualar la variable artificial a la raíz décima

c) Integración trigonométrica

En donde m o n, al menos una de ellas, es impar y ambas son al menos de potencia 3. El procedimiento de solución es el siguiente:

\* Si m es impar entonces:

\* Si n es impar entonces:

*-----------------------------------------------------------------------------------------------------*

En donde tanto m como n son pares, la clave está en utilizar las siguientes identidades trigonométricas, desarrollar y repetir el proceso de ser necesario:

*-----------------------------------------------------------------------------------------------------*

*\** Cuando n es par no importa el exponente de la tangente, entonces se extrae una sec2(v) y el resto será una potencia par de la secante que se sustituirá usando la identidad: .

\* Caso 2: cuando m es impar se separa una y con el resto de las tangentes se usa la identidad , se hacen los desarrollos recordando que el diferencial de la secante es .

\* Caso 3: si m es par y n es impar, entonces se cambian todas las tangentes por secantes con la identidad , se desarrolla y se integra directamente lo que se pueda y con el resto se usa la técnica de integración por partes.

\* Nota: si m es par y n = 0 se cambia , se desarrolla y quedarán potencias pares de la secante por lo que se aplica el caso 1.

d) Integración por partes

Fórmula:

La correcta selección de *u* y *dv* es imprescindible para que la integral de la derecha sea más fácil de realizar. A continuación, aparecen ciertas estructuras típicas de integración por partes para una adecuada selección de estos elementos.

|  |  |
| --- | --- |
| Estructura | Recomendación de selección |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | o bien |
|  | o bien |

*------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

*------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

*------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

*------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

------------------------------------------------------------------------------------------------------------

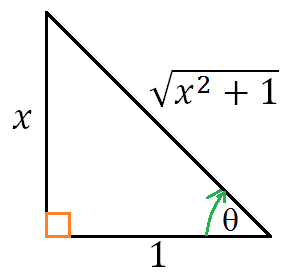
------------------------------------------------------------------------------------------------------------

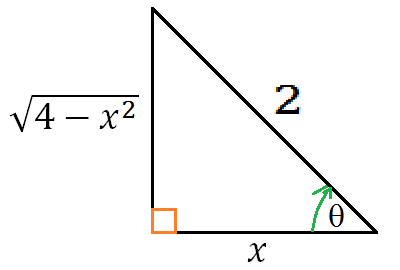
------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Existe un caso especial de integración por partes llamada cíclica, en donde la misma integral original aparece de nuevo a la derecha

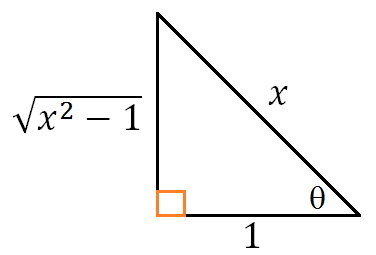
e) Integración por sustitución trigonométrica

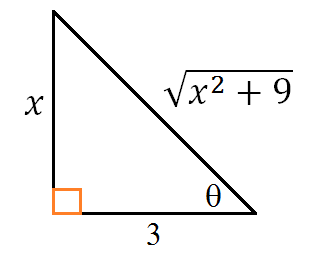
En este tipo de integrales se aprovecha el teorema de Pitágoras para hacer un cambio de variable en donde aparece el ángulo como la variable artificial. Las estructuras típicas poseen sumas o restas de cuadrados, por lo que es importante apoyarse en un triángulo rectángulo como apoyo visual para realizar las integrales.





------------------------------------------------------------------------------------------------------





f) Integración por fracciones parciales

Esta técnica se usa cuando la potencia del numerador es menor que la del denominador, entonces el denominador se factoriza y se procede a separar la integral en varias integrales más sencillas dependiendo de uno de los 4 casos que se indican a continuación.

Caso I: factores lineales no repetidos

*Igualamos a los términos de la misma potencia de x en cada lado de la ecuación*

*Finalmente sustituimos A y B en la solución*

* *2º método para calcular las constantes:*

*--------------------------------------------------------------------------------------------------------*

*Sustituimos A y B en la solución*

*--------------------------------------------------------------------------------------------------------*

*Sustituimos A, B y D en la solución*

----------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Sustituimos A, B y D en la solución*

Caso II: factores lineales repetidos

Igualar los elementos de la misma potencia de cada lado del igual

- Igualando las constantes:

- Igualando las :

- Igualando las :

- Igualando las :

Sustituyendo A, B y C en la ecuación de x2 se tiene:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Igualando las constantes:

Igualando las x:

Igualando las :

Igualando las :

Igualando las :

Sustituyendo en la ecuación de x3 se tiene:

Caso III: factores cuadráticos no repetidos

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Haciendo un sistema con las ecs. (1) y (3) se tiene:

Sustituyendo B en la ec. (1) queda:

Haciendo un sistema con las ecs. (2) y (4) se tiene:

Sustituyendo este resultado en la ec. (2) queda:

------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Despejando B de (1) queda: y sustituyendo en (3)

Sustituyendo este resultado en (5) queda:

Haciendo una matriz con las ecs. (2) y (4) tenemos:

Caso IV: factores cuadráticos repetidos

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Igualando :

Si despejamos B de (1) queda:

sustituyendo en (3),(5) y (7) queda:

Si multiplicamos (10) por -2 y le sumamos (11) queda:

Si multiplicamos (10) por -1 y le sumamos (12) queda:

Si multiplicamos (13) por -1 y le sumamos (14) queda

Sustituyendo D en (13) queda:

Sustituyendo D y F en (12) queda:

Sustituyendo F en (9) queda:

Si despejamos A de (2) queda:

Sustituyendo en (4),(6) y (8) queda

Multiplicando (16) por -2 y sumando (17) se tiene:

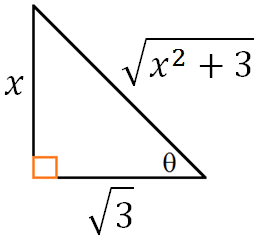
Multiplicando (16) por -1 y sumando (18) se tiene:

Multiplicando (19) por -1 y sumando (20) tenemos:

Sustituyendo C en (19) queda:

Sustituyendo C y E en (16) tenemos:

Sustituyendo E en (15) tenemos:



Combinación de casos